Tentamen Metrische ruimten, 21/aug/2008

- Schrijf op ieder vel je naam en het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat steeds duidelijk zien hoe je aan het antwoord gekomen bent.
- Er zijn vijf opgaven. Succes!

Opgave 1 Laat M de cirkel $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ zijn. Voor $x, y \in M$ definieren we $d(x, y) = 0$ als $x = y$, $d(x, y) = \pi$ als x en y antipodaal (tegenover elkaar liggend) zijn en in alle andere gevallen is $d(x, y)$ de lengte van de kortste boog in M die x met y verbindt. Toon aan dat d een metriek is voor M. ↳ 3e axioma

Opgave 2 Gegeven is een topologische ruimte A. Toon voor $H \subset A$ aan dat

a) H is gesloten in A dan en slechts dan als voor de rand $\partial(H)$ van H geldt $\partial(H) \subset H$,

b) $\partial(H) = \varnothing$ dan en slechts dan als H open en gesloten is in A.

Gebruik het bovenstaande om aan te tonen dat A samenhangend is dan en slechts dan als voor iedere niet lege $H \subset A$, $\partial(H)$ niet leeg is.

Opgave 3 De twee afbeeldingen $f, g : A \to B$ zijn continu. A is een topologische ruimte en B is een Hausdorff ruimte. Laat zien dat de verzameling $C = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ gesloten is in A. Leid hieruit af dat als $h : H \to H$ continu is op de Hausdorff ruimte H, de verzameling $\mathrm{Fix}(h) = \{x \in H \mid h(x) = x\}$ gesloten is in H.

Opgave 4 Gegeven is dat M een compacte metrische ruimte is met metriek d. Stel $f : M \to M$ is een continue afbeelding zodanig dat voor alle $x \in M$ geldt $f(x) \neq x$. Bewijs dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in M$ geldt $d(f(x), x) \geq \varepsilon$. (Aanwijzing: bekijk $g : M \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = d(f(x), x)$.)

Opgave 5 Gegeven is dat de rij functies f_n op een interval $I \subset \mathbb{R}$, uniform convergeert naar een functie f. Verder is gegeven dat f_n voor iedere n uniform continu is op I. Toon aan dat f uniform continu is op I.